
Apport de la convolution non linéaire à la caractérisation de l'endommagement des matériaux hétérogènes en résonance

Antonin Novak* — **Mourad Bentahar*** — **Laurent Simon***
Rachid El Guerjouma*

** Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613
Avenue Olivier Messiaen, F-72085, Le Mans cedex 9
{laurent.simon, mourad.bentahar}@univ-lemans.fr*

RÉSUMÉ. La méthode de convolution non linéaire, dite Synchronous Swept Sine est présentée dans le cadre de l'analyse d'endommagement des matériaux hétérogènes en résonance. Basée sur l'estimation des réponses fréquentielles d'ordres supérieurs, elle permet de détecter de nouveaux modes de résonances issus de l'interaction des modes de résonances fondamentaux avec l'endommagement. Les modes ainsi trouvés ont permis de définir de nouveaux paramètres non linéaires très sensibles à la présence d'endommagement et à son évolution et d'offrir une meilleure opportunité pour mieux comprendre les mécanismes physiques liés au comportement non linéaire hystérétique des matériaux hétérogènes.

ABSTRACT. Implementation of nonlinear convolution method, usually called Synchronous Swept Sine, is presented in the frame of damage characterisation of heterogeneous materials. The estimation of higher order frequency responses, the used approach allows detection of new resonance modes created during the interaction of classical resonance modes with damage. The created modes made possible the definition of new nonlinear parameters whose sensitivity to the presence of damage as well as its propagation is likely to go beyond structural health monitoring applications by offering a better understanding of the physics corresponding to hysteretic non linear materials.

MOTS-CLÉS : résonance non linéaire, comportement non linéaire hystérétique, composites, endommagement, identification des systèmes non linéaires, structure de hammerstein généralisée.

KEYWORDS: nonlinear resonance, hysteretic nonlinear behaviour, composites, damage, nonlinear systems identification, generalised Hammerstein structure.

DOI:10.3166/I2M.10.1-2.175-194 © 2010 Lavoisier, Paris

1. Introduction

Ces dernières années ont connu une évolution considérable dans l'étude de l'élasticité des matériaux non linéaires mésoscopiques (Guyer *et al.*, 1999 ; Naugolnykh *et al.*, 1998 ; Ostrovsky *et al.*, 2001 ; TenCate *et al.*, 2000 ; Tournat *et al.*, 2005 ; Bentahar *et al.*, 2006). Différents travaux ont ainsi montré que, lorsque lesdits matériaux sont soumis à une perturbation dynamique, leur comportement change en fonction du niveau de déformation induit. Ainsi, le comportement élastique d'un grand nombre de matériaux (roches, matériaux microfissurés, composites, os, béton, etc.) est bien décrit par la théorie classique de Landau dans la mesure où l'amplitude des déformations reste inférieure à environ 10^{-6} . Pour des niveaux de déformation plus importants ($\varepsilon > 10^{-6}$), le comportement élastique desdits matériaux n'est plus décrit par la théorie classique (Bentahar *et al.*, 2006 ; Landau *et al.*, 1986 ; Van Den Abeele *et al.*, 2000a ; Renaud *et al.*, 2008). A cet effet, différentes approches théoriques ont été proposées afin d'expliquer les observations expérimentales non classiques, en considérant les singularités de chacun des matériaux susmentionnés (Ostrovsky *et al.*, 2001 ; Guyer *et al.*, 1995 ; Scalerandi *et al.*, 2003 ; Zaitsev *et al.*, 2003 ; Bentahar *et al.*, 2006). Si une théorie unifiée reste à trouver, les observations relatives aux essais dynamiques transitoires et/ou stationnaires sont les mêmes, nonobstant la nature ou les constituants des matériaux étudiés. Par exemple, lors d'une excitation harmonique transitoire les matériaux sont excités simultanément à deux fréquences et l'interaction de ces ondes avec les différents constituants crée des fréquences harmoniques et des fréquences somme et différence (Van Den Abeele *et al.*, 2000b ; Moussatov *et al.*, 2002 ; Zaitsev *et al.*, 2005 ; Cantrell *et al.*, 1994). Lorsqu'on excite les mêmes matériaux en résonance, leurs propriétés viscoélastiques changent en fonction du niveau d'excitation. Cela a permis de montrer que les fréquences de résonance et les facteurs de qualité des différents modes de vibration varient en fonction du niveau de déformation (Muller *et al.*, 2005 ; Johnson *et al.*, 2005 ; Bentahar *et al.*, 2009 ; Van Den Abeele *et al.*, 2000c). L'utilisation des excitations harmonique et en résonance s'est révélée être un outil de contrôle non destructif efficace et a ainsi permis la caractérisation de l'endommagement d'un grand nombre de matériaux. Cependant, l'absence de méthodes élaborées en traitement du signal limite ces outils de contrôle santé aux résultats obtenus grâce aux instruments de mesure « classiques » utilisés. En particulier, durant les expériences non linéaires en résonance, l'analyseur de réseaux, couramment utilisé, ne prend en considération que la réponse du matériau à la fréquence d'excitation. De ce fait, toute information relative à une fréquence autre que celle d'excitation est systématiquement perdue. Cela a pour conséquence d'ignorer la sensibilité des éventuelles harmoniques créées par l'endommagement et de limiter ainsi les lois physiques qui gouvernent le comportement non linéaire hystérétique aux seuls modes de résonance fondamentaux. A notre connaissance, le travail proposé ici est le premier à proposer une analyse systématique visant à détecter les modes de résonance d'ordre supérieur et à étudier leur potentiel de contrôle non destructif.

Dans cette contribution, nous proposons une méthode de caractérisation originale de composites base métal et base polymère utilisant une approche de traitement du signal dédiée aux systèmes non linéaires. La méthode de convolution non linéaire, dite SSS (*Synchronous Swept Sine*), est utilisée dans le but d'améliorer les observations expérimentales en estimant simultanément la contribution linéaire du spectre *classique* et les contributions d'ordre supérieur. En présence d'endommagement, nous montrons que les spectres d'ordres supérieurs sont porteurs d'informations complémentaires à celles du spectre linéaire, dont les variations sont qui plus est très sensibles aux niveaux d'endommagement.

La première partie de cette contribution est dédiée à la présentation des principes fondamentaux de la théorie d'élasticité non linéaire des matériaux micro-endommagés et à l'analyse des résultats relatifs à la caractérisation du béton à partir de méthodes classiques (analyseur de réseaux).

Les principes de la méthode SSS sont ensuite exposés et les concepts de design du signal d'excitation, de convolution non linéaire, et d'identification des réponses fréquentielles d'ordres supérieurs sont introduits. Enfin, la méthode SSS est appliquée dans un cadre expérimental dédié à la caractérisation de l'endommagement de matériaux composites base métal et polymère.

2. Théorie de l'élasticité non linéaire

Les expériences classiques et dynamiques ont montré que la théorie de l'élasticité classique est incapable de décrire le comportement élastique des matériaux mésoscopiques à élasticité non linéaire (Naugolnykh *et al.*, 1998). En particulier, la relation contrainte/déformation mise en jeu dans ce cas nécessite d'être développée de façon à ce que les termes décrivant la non-linéarité classique, l'hystérésis et les effets de mémoire discrète soient pris en compte (Guyer *et al.*, 1995).

La relation contrainte/déformation peut ainsi être écrite sous la forme :

$$\sigma = \int K(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) d\varepsilon. \quad [1]$$

Dans ce cas, le module élastique K peut s'écrire en fonction de la déformation induite comme :

$$K(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = K_0 (1 + \beta \varepsilon + \delta \varepsilon^2 + \dots) - \alpha(\varepsilon, \dot{\varepsilon}), \quad [2]$$

où K_0 est le module élastique linéaire, ε est la déformation, β et δ représentent les paramètres élastiques classiques quadratique et cubique, respectivement. Ces derniers peuvent être écrits en fonction des constantes élastiques du 2nd, 3^e et 4^e ordre. Le paramètre α représente la non-linéarité hystérétique.

La façon dont le module élastique K est écrit dans l'équation [2], décrit explicitement la contribution des non-linéarités classique et hystérétique (figure 1). En effet, lorsqu'une perturbation acoustique de fréquence ω ($\omega = 2\pi f$) et d'amplitude ε se propage dans un matériau micro-fissuré, elle génère des composantes fréquentielles d'ordre supérieur (2ω , 3ω , etc.), dont l'amplitude est proportionnelle à ε^2 , ε^3 , etc. Cependant, lorsque le matériau micro-fissuré est non linéaire hystérétique, l'évolution des amplitudes des harmoniques paires et impaires est sérieusement perturbée et ne correspond de ce fait plus à la proportionnalité susmentionnée. Par exemple, les amplitudes de certaines harmoniques impaires sont supérieures à celles des harmoniques paires et/ou l'amplitude de la 3^e harmonique est proportionnelle à ε^2 (Van Den Abeele *et al.*, 2000a).

Dans les conditions d'ondes stationnaires, la formulation phénoménologique dans l'espace de Preisach-Mayergoyz (PM space approach) attribue l'ensemble des non-linéarités observées à des éléments appelés éléments élastiques hystérétiques (EEH). Ces derniers représentent les zones dites molles (endommagées ou micro fissurées dans notre cas) dans le cadre d'une étude de caractérisation de l'endommagement. En fonction de la pression acoustique appliquée, les EEH peuvent être dans un état fermé ou rigide (la déformation ne varie pas dans le temps) ou dans un état ouvert ou élastique (la longueur ou la déformation dépend du temps). Les règles de transition d'un état à un autre sont gouvernées par les pressions d'ouverture et de fermeture (P_o, P_f) spécifiques à chaque EEH (figue 2) (Scalerandi *et al.*, 2003 ; Guyer *et al.*, 1995).

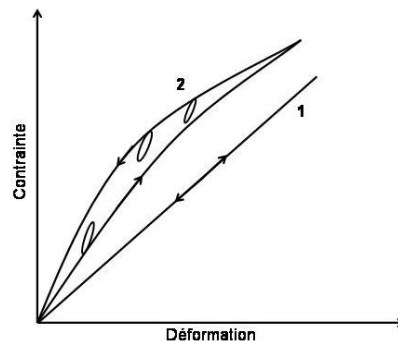


Figure 1. Courbe « contrainte déformation » d'un matériau purement élastique (1) et d'un matériau à comportement non linéaire hystérétique (2). Pour des niveaux de déformation modérés, il est important de noter les boucles internes décrites par le matériau non linéaire hystérétique lors de son comportement hystérétique global

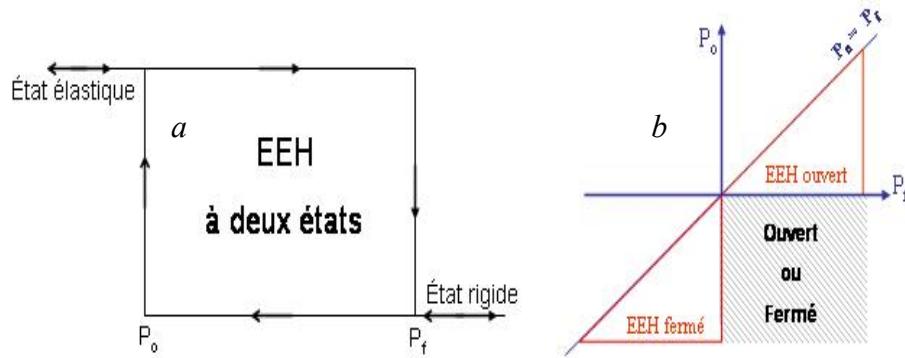


Figure 2. (a) Comportement à deux états d'un élément élastique hystérétique. Le passage de l'état ouvert (fermé) à l'état fermé (ouvert) ne suit pas le même chemin. (b) Espace de Preisach-Mayergoyz. Les EEH sont placés selon leurs pressions caractéristiques. Sur la diagonale se trouvent les éléments purement élastiques (sans hystérésis)

La description dans l'espace de PM montre que le comportement non linéaire observé à des taux de déformation supérieurs ou égaux à 10^{-6} est purement hystérétique, en d'autres termes dominé par le paramètre de non-linéarité hystérétique α . Par conséquent, la variation relative de la fréquence de résonance peut s'écrire sous la forme (Van Den Abeele *et al.*, 2000c) :

$$\alpha_f \approx \frac{\Delta f}{f_0} \frac{1}{\varepsilon_A} = \frac{f - f_0}{f_0} \frac{1}{\varepsilon_A}, \quad [3]$$

où f_0 est la fréquence de résonance correspondant au plus bas niveau d'excitation, f est la fréquence de résonance obtenue pour des niveaux d'excitation plus importants et ε_A est la déformation à la résonance. Il est également intéressant de considérer les effets de non linéaires hystérétiques relatifs à la largeur de bande (Johnson *et al.*, 2005) que l'on peut définir à travers le facteur de qualité (inversement proportionnel à l'absorption) :

$$\alpha_Q \approx \left(\frac{1}{Q_0} - \frac{1}{Q} \right) \frac{1}{\varepsilon_A}, \quad [4]$$

où Q_0 est le facteur de qualité du plus faible niveau d'excitation et Q celui correspondant aux niveaux d'excitation plus importants. Les facteurs de qualité sont calculés comme $f / \delta f$, où f est la fréquence de résonance et δf est la largeur de bande à -3 dB.

3. Résonance non linéaire classique

Le comportement non linéaire hystérétique peut être observé par exemple sur des barreaux en béton excités en résonance (Bentahar *et al.*, 2006). Dans ce cas, des balayages fréquentiels sont effectués autour du premier mode de résonance en compression, communément appelé mode d'Young. L'amplitude des déformations (ou bien la valeur efficace de la vitesse de vibration) est enregistrée dans des conditions stationnaires (figure 3). Dans ce cas, il est possible de considérer des conditions aux limites libres du côté du vibromètre laser alors que du côté de l'excitation (céramique piézoélectrique), les conditions aux limites s'écrivent suivant :

$$\rho \dot{v} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\rho \omega}{Q_0} v + A_{ext} \sin(\omega t), \quad [5]$$

où v est la vitesse de vibration particulaire, ω la fréquence angulaire, E le module d'Young, ε la déformation, ρ la densité volumique, A_{ext} l'amplitude d'excitation, Q_0 le facteur de qualité à faible niveau d'excitation et σ la contrainte appliquée au niveau des grains, qui s'écrit en fonction de l'amortissement η comme :

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}. \quad [6]$$

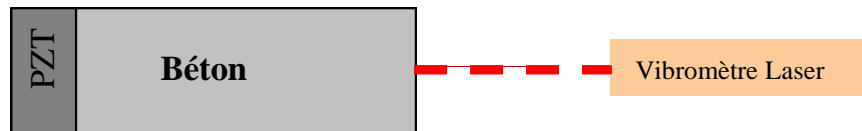


Figure 3. Configuration expérimentale permettant d'exciter un barreau en béton à l'aide d'une céramique piézoélectrique et de détecter les vibrations sans contact à l'aide d'un vibromètre laser (Bentahar *et al.*, 2006)

Pour ces essais, le béton est d'abord analysé à l'état intact, puis à l'état endommagé, l'endommagement étant effectué grâce à un essai quasi statique de compression au moyen d'une machine de traction/compression Instron. D'après l'équation relative au module élastique (équation [2]), l'existence d'une élasticité non linéaire hors équilibre (hystérétique) se manifeste à travers la décroissance de la fréquence de résonance du mode suivi, lorsque l'amplitude d'excitation devient plus importante. Ces observations effectuées lors des essais dits en *dynamique rapide*, sont illustrées en figure 4. Dès l'état intact, un comportement hystérétique du béton dû à sa structure hétérogène et à l'existence de microfissures créées lors du gâchage peut être observé. A l'état endommagé et pour les mêmes excitations, le

comportement non linéaire hystérétique du béton évolue de manière importante comme le montre la figure 5. En effet, la variation relative de la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude à la résonance (α_f) indique une pente à l'état endommagé 400 fois plus importante que celle correspondant à l'état intact. Dans le même temps, la variation relative du facteur de qualité (α_Q) en fonction de l'amplitude à la résonance n'évolue que de d'un facteur correspondant à 3.5.

Ces résultats montrent que la méthode de résonance non linéaire appliquée à la caractérisation de l'endommagement des matériaux hétérogènes tels que le béton est capable de renseigner sur leur état de santé, à travers des paramètres liés à leurs propriétés d'élasticité et d'amortissement α_f et α_Q , dont les valeurs sont directement relevées à partir des courbes de résonance des modes fondamentaux. Cependant, ces mêmes matériaux de structure complexe (granulaires consolidés et/ou microfissurés, etc.) sont susceptibles de générer des modes de résonance d'ordre supérieur, dont la détection n'est pas possible par les moyens traditionnels de mesure (analyseurs de réseaux par exemple). Il est donc nécessaire de développer des méthodes en traitement du signal capables de détecter lesdits modes (lorsqu'ils existent) et de suivre leur évolution en fonction de l'endommagement. De tels outils permettent alors de définir de nouveaux paramètres d'hystérésis d'ordre supérieur ($\alpha_{n,f}$ et $\alpha_{n,Q}$ $n=2,3,etc.$), dont la sensibilité à l'endommagement peut mieux renseigner sur le comportement non linéaire hystérétique des matériaux endommagés.

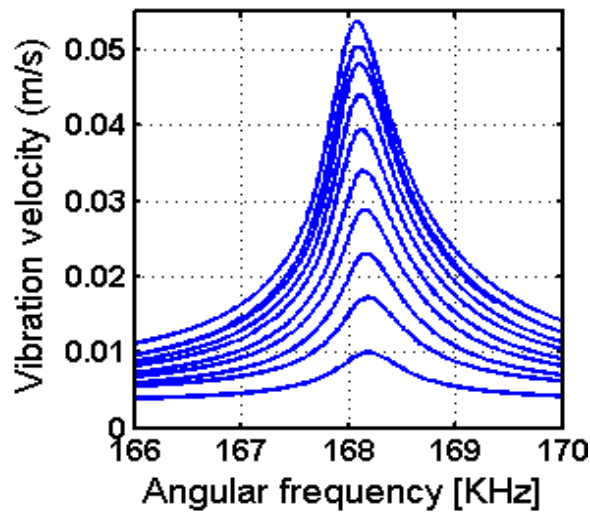


Figure 4. Courbes de résonance relatives au premier mode de compression (mode d'Young) obtenues pour différents niveaux d'excitation dans le cas d'un béton intact

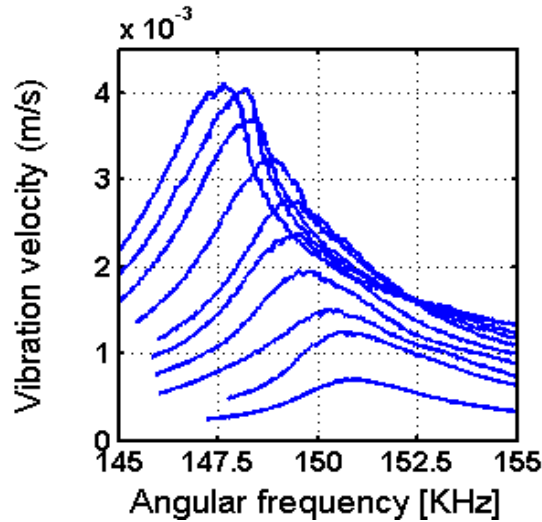


Figure 5. Courbes de résonance relatives au premier mode de compression (mode d'Young) obtenues pour différents niveaux d'excitation dans le cas d'un béton endommagé par compression

4. Méthode d'identification de systèmes non linéaires Synchronous-Swept-Sine

4.1. Identification de systèmes non linéaires : introduction

Un des nombreux moyens d'estimation de la réponse fréquentielle d'un système SISO (*single-input, single-output*), linéaire et invariant dans le temps, consiste à exciter le système par un signal d'entrée $x(t)$ de type exponentielle complexe (amplitude complexe A_0 , fréquence F_0), à mesurer l'exponentielle complexe de sortie $y(t)$ (amplitude complexe A_1 , fréquence F_0), et à faire varier la fréquence d'excitation F_0 . Rappelons que les exponentielles complexes sont en effet les fonctions propres de l'opération de filtrage linéaire. La réponse fréquentielle $H(F_0)$ est alors définie suivant :

$$H(F_0) = \frac{A_1}{A_0}. \quad [7]$$

La réponse fréquentielle $H(F)$ peut également être obtenue par excitation du système en sinus glissant (*swept sine*), dans la bande de fréquence considérée. Dans le cas d'une excitation à large bande, $H(F)$ s'écrit comme le rapport de l'interspectre sortie-entrée $S_{yx}(F)$ et de la densité spectrale de puissance de l'entrée $S_{xx}(F)$:

$$H(F) = \frac{S_{yx}(F)}{S_{xx}(F)}. \quad [8]$$

Dans le cas où le système SISO n'est pas linéaire, la notion de réponse fréquentielle n'a plus de sens pour au moins deux raisons. D'une part, le comportement du système dépend de l'amplitude du signal d'entrée. D'autre part, lorsqu'une exponentielle complexe excite l'entrée du système, il y a en sortie de système génération d'harmoniques supérieures. Le problème auquel est alors confronté l'expérimentateur est celui de l'identification d'un système dynamique non linéaire. Suivant Nelles (2001), il est usuel de distinguer les cas où seules les données d'entrée et de sortie sont disponibles (*black box model*), des cas où le système est connu au travers de lois physiques (*white box model*), le modèle intermédiaire (*grey box model*) correspondant à un cas où on dispose d'une connaissance partielle des lois de comportement du système étudié. Le cadre de l'étude présentée ici est celui de l'identification de systèmes dynamiques non linéaires à partir des seules données d'entrée et de sortie.

Afin de décrire en des termes plus précis le comportement des systèmes dynamiques non linéaires, il convient de faire appel à des structures de systèmes particulières. Parmi ces structures, on peut citer les structures (systèmes de type schéma bloc) de Hammerstein, de Wiener, de Wiener-Hammerstein, de Wiener généralisé et de Hammerstein généralisé (Haber *et al.*, 1999). La structure du modèle de Volterra (Schetzen, 1980) permet également de représenter une classe importante de systèmes non linéaires (on parle de développement en série de Volterra). L'ensemble de ces structures génère des méthodes d'identification dite aveugle, en ce sens qu'aucune modélisation paramétrique de système n'est postulée. Il existe également des méthodes dites d'identification paramétrique, qui présupposent un modèle de comportement (non linéaire) du système. Parmi ces méthodes, on peut citer les filtres de Kalman étendu (Sorenson, 1985), le filtrage particulaire (Cappé, 2007), les modèles NARMAX (Thouverez *et al.*, 1996 ; Cappé *et al.*, 2007).

Lors d'une procédure d'identification de systèmes non linéaires, trois étapes sont habituellement mises en place de manière successive :

- Le choix de la structure des modèles,
- L'estimation des filtres (cas des schémas blocs) ou des paramètres (cas de l'identification paramétrique) à identifier,
- La validation du modèle choisi.

Enfin, le choix du signal d'excitation dépend de la méthode et de la structure choisies pour la procédure d'identification : multitons (Crama *et al.*, 2001), processus aléatoires stationnaires (Bendat, 1998), signaux pseudo-aléatoires (Tan *et al.*, 2002), chirps exponentiels (Farina, 2000).

Dans cet article, une structure de Hammerstein généralisée d'ordre N est considérée, comme illustré en figure 6. La structure est représentée par N

« branches » parallèles, chacune étant constituée d'un filtre linéaire invariant dans le temps $G_n(f)$, précédée d'une fonction polynômiale instantanée d'ordre n (pour $n \in [1, N]$). A partir des données d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, la procédure d'estimation consiste donc à estimer les filtres inconnus $G_n(f)$. La méthode proposée ici est basée sur une excitation du système par un chirp exponentiel et permet d'estimer les filtres $G_n(f)$ en un seul passage. Cette méthode, appelée convolution non linéaire, initialement proposée par Farina (2000), a été améliorée par Novak *et al.* (2009), dans le contexte de l'identification de systèmes non linéaires audio. Par souci de simplicité, les signaux sont notés à temps et à fréquence continus, même si d'un point de vue opérationnel, l'intégralité des opérations présentées par la suite est bien entendu effectuée à temps et à fréquence discrets.

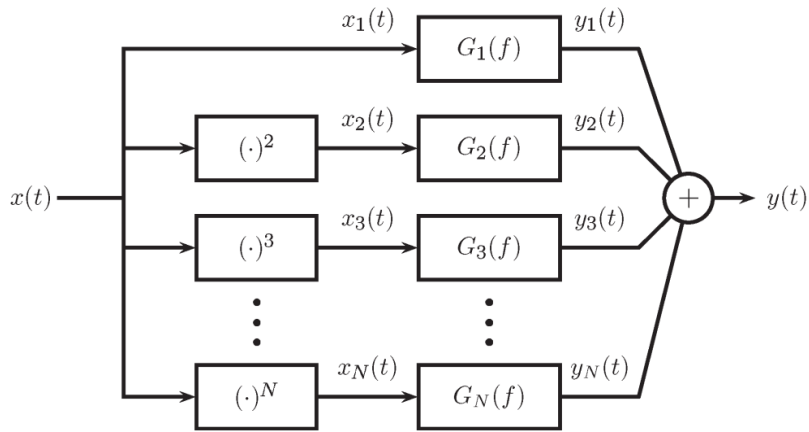


Figure 6. Structure de Hammerstein généralisée d'ordre N représentée par N « branches » parallèles, chacune étant constituée d'un filtre linéaire invariant, précédée d'une fonction polynômiale instantanée d'ordre n

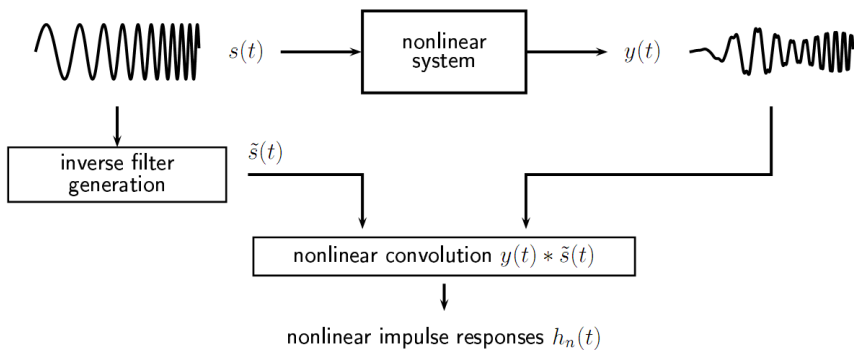


Figure 7. Diagramme bloc de la méthode SSS incluant la convolution non linéaire

4.2. Description de la méthode

Le diagramme bloc de la méthode de convolution non linéaire est proposé en figure 7. Dans un premier temps, le signal d'entrée $s(t)$ (*chirp exponentiel*) est généré et excite le système à analyser dans une bande de fréquences préalablement définie. Le signal de sortie $y(t)$ est ensuite utilisé pour l'opération de convolution non linéaire. Celle-ci procède de la manière suivante. Le signal $\tilde{s}(t)$ est obtenu par filtrage inverse de $s(t)$, donc tel que :

$$s(t) * \tilde{s}(t) = \delta(t), \quad [9]$$

où $\delta(t)$ désigne la distribution de Dirac. Pour un signal d'entrée de la forme,

$$s(t) = \sin \left\{ 2\pi f_1 L \left[\exp\left(\frac{t}{L}\right) - 1 \right] \right\}, \quad [10]$$

où f_1 est la fréquence de départ du chirp exponentiel, L est le paramètre de croissance du chirp, on montre que (Novak *et al.*, 2009)

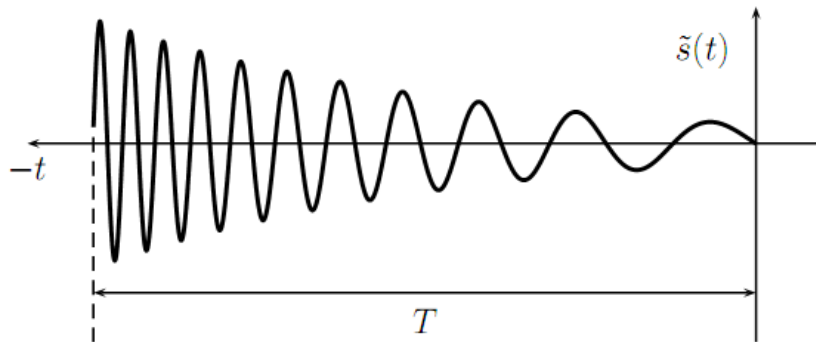


Figure 8. Signal $\tilde{s}(t)$, appelé filtre inverse

$$\tilde{s}(t) = \frac{f_1}{L} \exp\left(-\frac{t}{L}\right) s(-t). \quad [11]$$

Le signal $\tilde{s}(t)$ parfois appelé filtre inverse (Farina, 2000), est donc une version retournée et modifiée en amplitude du signal $s(t)$, comme illustré en figure 8. Enfin, la convolution entre le signal de sortie $y(t)$ et le filtre inverse est réalisée, dont le résultat s'exprime sous la forme :

$$y(t) * \tilde{s}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t + \Delta t_m), \quad [12]$$

où $h_m(t)$ représente la réponse impulsionnelle d'ordre supérieur m , et où Δt_m désigne la durée entre la première réponse impulsionnelle (contribution linéaire) et celle d'ordre m , comme indiqué en figure 9. Les réponses impulsionnelles $h_m(t)$ étant décalées temporellement, elles peuvent être séparées les unes des autres. Une fois estimées, il est possible de calculer les transformées de Fourier des $h_m(t)$, appelées réponses fréquentielles d'ordre supérieur, et notées $H_m(f)$.

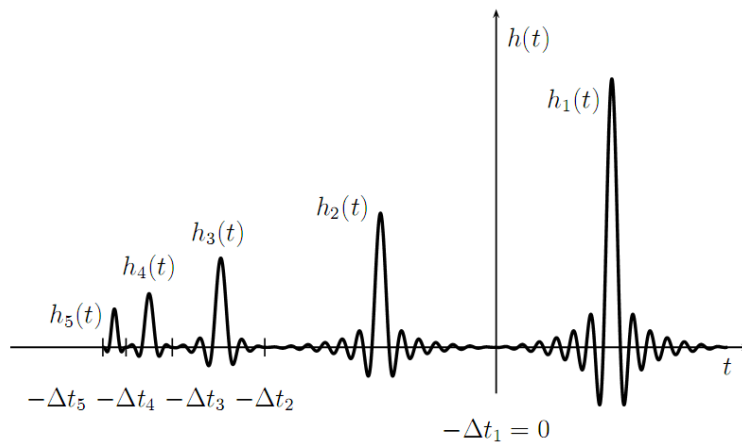


Figure 9. Réponses impulsionnelles $h_m(t)$ et Δt_m correspondants

Les réponses fréquentielles d'ordre supérieur $H_m(f)$ représentent les dépendances fréquentielles (en module et en phase) des composantes d'ordre supérieur. Ainsi, la réponse fréquentielle $H_1(f)$ modélise la contribution linéaire, alors que la réponse fréquentielle $H_m(f)$, d'ordre supérieur $m > 1$, peut être vue comme la réponse du système non linéaire en ne considérant que l'effet de la fréquence d'entrée f sur l'harmonique m de sortie, de fréquence mf .

Pour finir, les relations entre les réponses fréquentielles d'ordre supérieur $H_m(f)$ et les filtres linéaires $G_n(f)$ s'expriment sous la forme (Novak *et al.*, 2000), $\forall f_0 > 0$:

$$G(f_0) = [A^T]^{-1} H(f_0), \quad [13]$$

où $G(f_0) \equiv \{G_1(f_0), G_2(f_0), \dots, G_M(f_0)\}^T$, $H(f_0) \equiv \{H_1(f_0), H_2(f_0), \dots, H_M(f_0)\}^T$, et où la matrice $[A]$ est constituée des éléments $A_{n,m}$, $n \in [1, N]$, $m \in [1, M]$, tels que :

$$A_{n,m} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{2n+1-m}{2}} \binom{n}{\frac{n-m}{2}}}{2^{n-1}} & \text{pour } n \geq m \text{ et } (n+m) \text{ pair,} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad [14]$$

5. Dispositif expérimental et étude de linéarité

Le dispositif expérimental est présenté en figure 10. Les signaux sont générés grâce à l'interface *RME Fireface 400*, et ce dans le but d'exciter les matériaux étudiés aux fréquences de résonance souhaitées. Selon la configuration expérimentale, les signaux électriques amplifiés à gain constant sont utilisés pour exciter soit un pot vibrant soit une céramique piézoélectrique. Les vibrations générées sont ensuite détectées à l'aide d'un accéléromètre relié à un conditionneur et placé sur la face libre du matériau testé. Les signaux recueillis sont finalement numérisés à 24 bits/192 kHz via l'interface *RME Fireface 400* avant d'être traités. Dans un premier temps, la configuration expérimentale proposée associée à la méthode SSS est comparée à une méthode de résonance classique (sinus pas-à-pas) utilisant généralement un analyseur de réseaux (Bentahar *et al.*, 2006). Comme illustré en figure 11, les résultats obtenus à partir des deux méthodes sont proches, les différences relatives moyenne et maximum entre les courbes de résonance d'un même mode de vibration étant de 0,3 % et 2 %, respectivement.

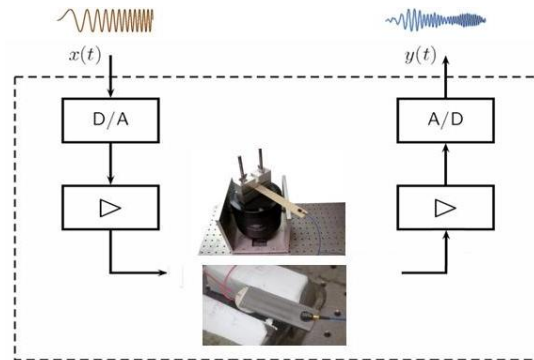


Figure 10. Configurations expérimentales utilisées pour la caractérisation non linéaire en résonance utilisant des convertisseurs numérique/analogique (D/A) en émission et analogique/numérique (A/D) en réception. Les excitations sont effectuées moyennant un pot vibrant (en haut) ou une céramique piézoélectrique (en bas)

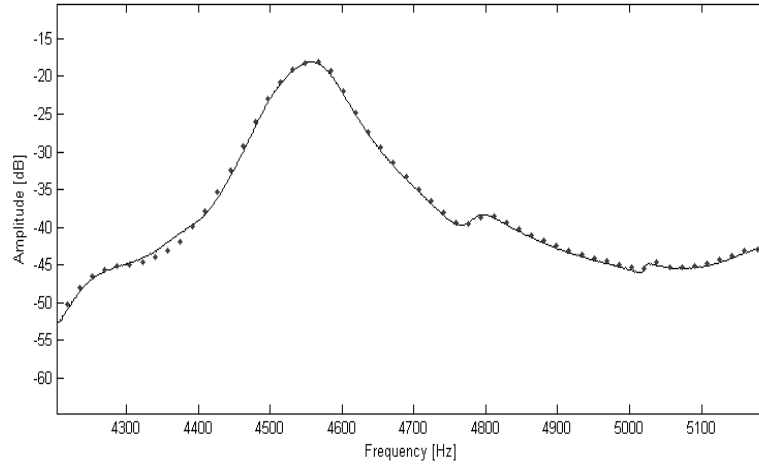


Figure 11. Courbe de résonance : comparaison analyseur de réseaux (pointillés) et la méthode SSS (ligne continue)

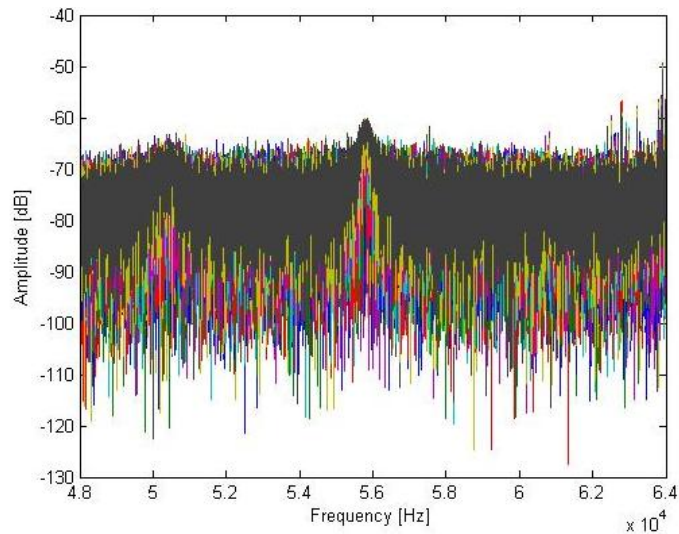


Figure 12. Courbes de résonance en harmonique 2 du mode fondamental de vibration en flexion obtenues dans le cas d'un composite métallique Acier-TiC (MKST 242) intact. Le niveau de l'harmonique à 56kHz est pratiquement confondu avec le niveau de bruit. Son émergence par rapport au niveau du bruit traduit la limite du fonctionnement linéaire du dispositif expérimental

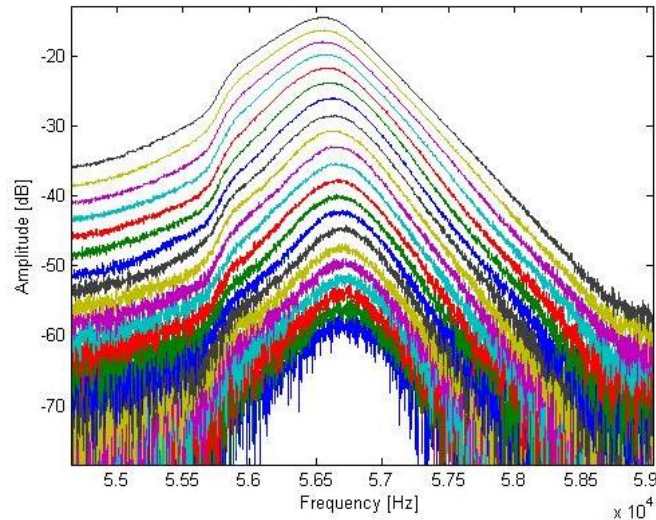


Figure 13. Courbes de résonance en harmonique 2 du mode fondamental de vibration en flexion obtenues dans le cas d'un composite métallique Acier-TiC (MKST 242) endommagé par un essai de traction. Il est important de remarquer qu'aux mêmes niveaux d'excitation l'harmonique 2 augmente de -60 dB (état intact) à environ -10 dB (état endommagé)

Dans le but de caractériser la linéarité du dispositif expérimental, un matériau dont la non-linéarité est bien inférieure à celle pouvant être générée par les instruments de génération (carte électronique et amplificateur) est testé (Bentahar *et al.*, 2006). Pour ce faire, des mesures en résonance sont effectuées sur des composites métalliques acier-TiC fabriqués dans les mêmes conditions par MECACHROM SA, France, avec une fraction volumique en TiC de 25 %. Ces composites métalliques sont excités par des céramiques piézoélectriques attachées à l'une des extrémités du composite afin de générer les vibrations ultrasonores dont la détection s'effectue à l'aide d'un accéléromètre placé à l'autre extrémité de l'échantillon. La configuration expérimentale ainsi proposée et la forme en plaque du composite (61 x 9,5 x 2,5 mm) favorisent la génération de modes de résonance de flexion. Trois échantillons ont été utilisés comme référence et ont été testés à l'état intact. Les autres échantillons ont été endommagés par essai de traction à l'aide d'une machine Instron. Tous les échantillons (intacts et endommagés) ont été excités au voisinage de leur mode fondamental de résonance en flexion, pour des excitations allant de 1V à 10V avant amplification. Cela a permis d'atteindre des niveaux d'accélération de l'ordre de 80 m/s².

Pour les échantillons intacts, l'analyse par la méthode SSS a mis en évidence l'absence d'harmoniques supérieures en dehors du niveau d'excitation le plus élevé

(80 m/s²) pour une dynamique d'environ 70 dB. Dans le cas correspondant à l'excitation maximale, une harmonique isolée a été relevée de l'ordre de -60 dB (figure 12). Dans ce cas, le niveau d'accélération de 80 m/s² peut être considéré comme le seuil de fonctionnement non linéaire du dispositif expérimental, non seulement à cause de l'apparition d'une seconde harmonique mais, également au regard de l'absence de variation de la fréquence de résonance et du facteur de qualité du mode fondamental de résonance en flexion (absence de variation respectée jusqu'à 80 m/s²). Par ailleurs, lorsque les composites métalliques endommagés par essai de traction sont soumis aux mêmes niveaux d'excitation, la méthode SSS permet de mettre en valeur une évolution importante de la seconde harmonique dont l'amplitude varie de -60 dB à -15 dB (figure 13). Dans ces conditions, le dispositif expérimental proposé peut être considéré comme apte à suivre l'évolution des modes de résonance de différentes natures (dispersifs ou non dispersifs), dans le cas d'expériences mettant en jeu deux états (avant et après endommagement), ou lors du suivi d'un endommagement progressif.

6. Caractérisation de l'endommagement graduel d'un composite base polymère

Le composite est une matrice polymère chargée de fibres de verre. Il est constitué de deux couches symétriques de quatre plis [90/0₂]_s. Le composite est excité par un pot vibrant selon une configuration encastré/libre aux alentours de son premier mode de vibration en flexion. Cela permet de révéler que le composite se comporte de façon non linéaire hystérétique, déjà à l'état intact ($d = 0\text{mm}$). En effet, l'évolution du décalage fréquentiel en fonction du niveau d'excitation permet d'estimer les paramètres hystérétiques $\alpha_f = 6.8 \cdot 10^{-3}$ et $\alpha_Q = 9 \cdot 10^{-3}$. Par ailleurs, l'application de la méthode SSS fournit une information nouvelle sur l'existence d'une seconde harmonique à l'état intact. Contrairement à ce qui est observé pour le composite acier/TiC, la seconde harmonique est clairement détectée avant l'endommagement et son amplitude peut atteindre jusqu'à -40 dB, alors que celle du fondamental avoisine les -4 dB. La plaque en composite est ensuite endommagée graduellement à l'aide d'un essai de flexion trois points. L'endommagement est réalisé en imposant des déplacements allant de 0 à 3 mm par pas de 1 mm. Dans les mêmes conditions que celles de l'état intact, l'évolution du mode fondamental de flexion est suivi, de même que la deuxième harmonique créée suite à l'interaction avec le matériau (figure 14).

Le tableau 1 synthétise les valeurs des paramètres hystérétiques estimés à l'état intact et aux trois états endommagés. Si α_f ne varie que peu en fonction de l'endommagement (il double sa valeur entre l'état 0 et l'état 3), il est important de noter que le coefficient α_Q ne varie quasiment pas au cours du même endommagement. Ces deux résultats montrent que, même si la non-linéarité hystérétique existe à l'état intact (décalage fréquentiel et variation du facteur de qualité en fonction de l'excitation), cela n'engage pas la sensibilité des paramètres α_f et α_Q à l'endommagement de façon systématique. Par ailleurs, le même tableau montre que le paramètre α_{2f} , égal à α_f à l'état intact, avoisine une valeur proche de $3\alpha_f$ pour l'état d'endommagement 3. Par

ailleurs, alors que les valeurs de α_Q n'évoluent pratiquement pas avec l'endommagement, le paramètre α_{2Q} , dont la valeur était 9 fois inférieure à celle de α_Q à l'état intact, augmente d'un facteur 50 entre l'état 0 et l'état 3. Même si l'origine exacte de cette importante sensibilité à l'endommagement reste inconnue à ce jour, elle est cependant et indubitablement liée à la création de l'endommagement et à son évolution au cours des différents essais mécaniques. Ainsi, la résonance non linéaire conjuguée à la méthode SSS offre de nouvelles possibilités pour la caractérisation fine de l'endommagement de matériaux hétérogènes.

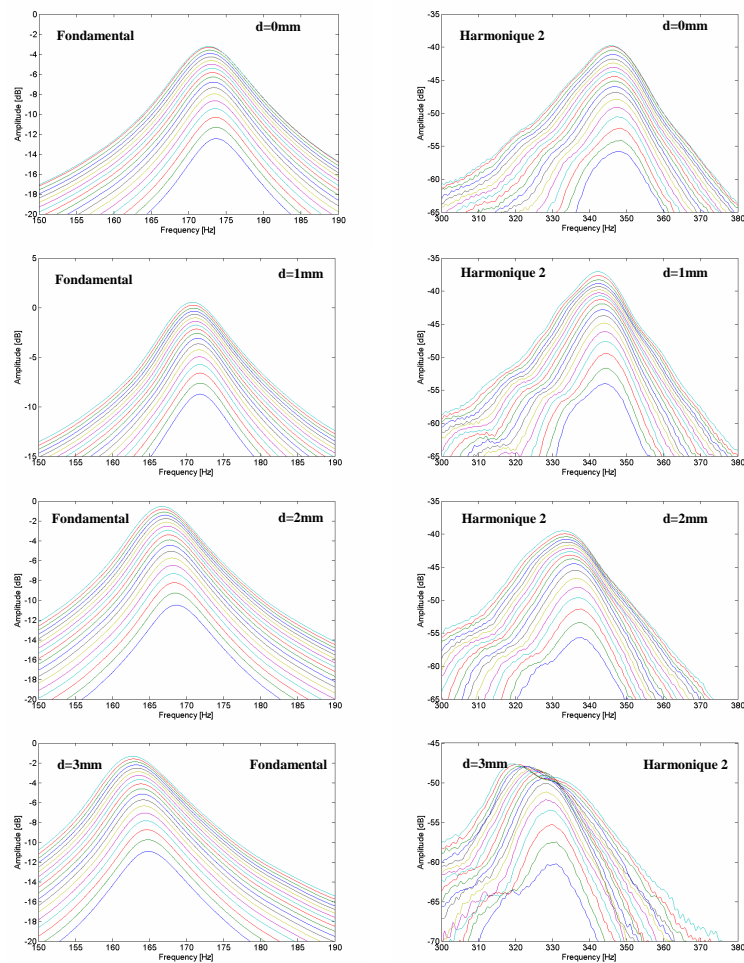


Figure 14. Courbes de résonance relatives au composite base polymère plis croisés obtenues à l'état intact et aux états endommagés. L'endommagement est réalisé à l'aide d'essais quasi-statiques en flexion trois points allant de 0 mm à 3 mm par pas de 1mm. Le mode fondamental correspond au premier mode de vibration en flexion et la 2^e harmonique est détectée en appliquant la MCN

	α_f	α_Q	α_{2f}	α_{2Q}
Etat 0	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}
Etat 1	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$
Etat 2	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
Etat 3	$1.5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$

Tableau 1. Paramètres non linéaires hystérétiques liés au mode de résonance en flexion

7. Conclusions et perspectives

Ce travail a pour but de caractériser l'endommagement des matériaux par la méthode de spectroscopie non linéaire en résonance. La sensibilité de cette méthode à l'endommagement étant intrinsèquement limitée par les appareils classiques de mesure, l'utilisation de la méthode *Synchronous Swept Sine* associée à la résonance non linéaire a permis de faire apparaître de *nouveaux modes de vibrations* (modes harmoniques), créés par l'interaction des modes fondamentaux (ou classiques) avec l'endommagement. Il apparaît ainsi que les modes de résonance fondamentaux et/ou harmoniques ne manifestent pas la même sensibilité à l'endommagement. S'il est difficile de se prononcer sur les origines de cette variation de sensibilité (dont l'une des raisons pourrait être liée à la façon dont la zone endommagée est excitée lors des essais en vibration en termes de types de mode de résonance et d'amplitude), la multitude des modes d'endommagement pouvant être générés (fissuration matricielle, endommagement de l'interface renforts/matrice, fissuration des renforts, etc.) nécessite clairement plus de recul avant de se prononcer sur la nature de l'interaction vibration/endommagement. Il est donc essentiel de comprendre et modéliser cette interaction qui est à l'origine même des types des modes harmoniques (pairs et impairs) détectés par la méthode SSS. Cette dernière a permis d'observer que l'évolution du comportement non linéaire hystérétique du composite base polymère est plutôt d'ordre visqueux. Cette évolution n'a pu être observée de façon importante sur le mode de résonance fondamental, mais plutôt sur son harmonique 2 à travers le paramètre α_{2Q} . La méthode SSS ne se limite donc pas à diagnostiquer l'état de santé en résonance des matériaux composites ou autres, mais offre également de nouvelles possibilités pour mieux comprendre l'évolution du comportement non linéaire hystérétique des matériaux complexes en mettant l'accent sur la nécessité et l'intérêt d'accéder à l'information inhérentes aux ordres supérieurs.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Dr. Vincent Tournat pour son implication et ses remarques pertinentes. Ce travail a été financé par le projet FUI AMETIS (Advanced Metallurgical Technologies for Innovative Systems).

8. Bibliographie

- Bendat J.S., *Nonlinear System Techniques and Applications*, New York, Wiley, 1998.
- Bentahar M., El Aqra H., El Guerjouma R., Griffa M., Scalerandi M., “Hysteretic elasticity in damaged concrete: Quantitative analysis of slow and fast dynamics”, *Phys. Rev. B*, vol. 73, n° 1, 2006, p. 14116.
- Bentahar M., El Guerjouma R., “Monitoring progressive damage in polymer-based composite using nonlinear dynamics and acoustic emission”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 125, n° 1, 2009, p. 39-44.
- Cantrell JH, Yost WT., “Acoustic harmonic generation from fatigue induces dislocation dipoles”, *Phil Mag A*, vol. 69, n° 2, 1994, p. 315-326.
- Cappé O., Godsill S.J., Moulines E., “Initial estimates of Wiener and Hammerstein systems using multisine excitation”, *Proc. IEEE*, vol. 95, n° 5, 2007, p. 899-924.
- Crama P., Schoukens J., “An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 50, n° 6, 2001, p. 1791-1795.
- Farina A., “Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique”, in *Proc. AES 108th Conv.*, Paris, France, Feb. 2000.
- Guyer, R. A., McCall K. R., Boitnott G. N., “Hysteresis, discrete memory and nonlinear wave propagation in rock: A new paradigm”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, n° 17, 1995, p. 3491-3494.
- Guyer R. A., Johnson P. A., “Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence for a new class of materials”, *Phys. Today*, vol. 52, 1999, p. 30-36.
- Haber R, Keviczky L., *Nonlinear System Identification: Input/Output Modeling Approach*, vol. 1/2., Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1999.
- Johnson P. A., Sutin A., “Slow dynamics and anomalous nonlinear fast dynamics in diverse solids”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 117, n° 1, 2005, p. 124.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Theory of Elasticity*, New York, Pergamon, 1986.
- Moussatov A., Castagnède B., Gusev V. E., “Frequency up-conversion and frequency down-conversion of acoustic waves in damaged materials”, *Phys. Lett. A*, vol. 301, 2002, p. 281-290.
- Muller M., Sutin A., Guyer R., Talmant M., Laugier P., Johnson P. A., “Nonlinear resonant ultrasound spectroscopy (NRUS) applied to damage assessment in bone”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118, n° 6, 2005, p. 39-46.
- Naugolnykh K., Ostrovsky L., *Nonlinear wave processes in acoustics*, Cambridge texts in applied mathematics, London, Cambridge University Press, 1998.
- Nelles O., *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2001.
- Novak A., Simon L., Kadlec F., Lotton P., “Nonlinear System Identification Using Exponential Swept-Sine Signal”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, first publish 2009-10-30.

- Ostrovsky L. A., Johnson P. A., “Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials”, *Riv. Nuovo Cimento*, vol. 24, n° 7, 2001, p. 1-46.
- Renaud, G., Calle, S., Remenieras, J. P., Defontaine, M., “Exploration of trabecular bone nonlinear elasticity using time-of-flight modulation”, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control*, vol. 55, n° 7, 2008, p. 1497-1507.
- Scalerandi M., Delsanto P. P., Agostini V., Van Den Abeele K., Johnson P. A., “Local Interaction Simulation Approach to Modeling Nonclassical, Nonlinear Elastic Behavior in Solids”, *Journ. Ac. Soc. Am.*, vol. 113, 2003, p. 3049-3059.
- Schetzen M., *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, New York, Wiley, 1980.
- Sorenson H., *Kalman Filtering: Theory and Application*, Montvale, NJ: IEEE Press, 1985.
- Tan A. H., Godfrey K., “The generation of binary and near-binary pseudorandom signals: An overview”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 51, n° 4, 2002, p. 583-588.
- TenCate J. A., Smith E., Guyer R., “Universal slow dynamic in granular solids”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, n° 5, 2000, p. 1020-1023.
- Thouverez F., Jezequel L., “Identification of NARMAX models on a modal base”, *J. Sound Vib.*, vol. 189, n° 2, 1996, p. 193-213.
- Tournat V., Zaitsev V., Nazarov V.E., Gusev V.E., Castagnède B., “Experimental study of nonlinear acoustic effects in a granular medium”, *Acoust. Physics*, vol. 51, n° 5, 2005, p. 543-553.
- Van Den Abeele K., Johnson P. A., Sutin A. M., “Nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage. Part I: nonlinear wave modulation spectroscopy”, *Res. Nondestr. Eval.*, vol. 12, n° 1, 2000a, p. 17-30.
- Van Den Abeele K., Carmeliet J., TenCate J. A., Johnson P. A., “Nonlinear Elastic Wave Spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage. Part II: Single Mode Nonlinear Resonance Acoustic Spectroscopy”, *Res. Nondestr. Eval.*, vol. 12, n° 1, 2000b, p. 31-42.
- Van Den Abeele K., De Visscher J., “Damage assessment in reinforced concrete using spectral and temporal nonlinear vibration techniques”, *Cement and Concrete Research*, vol. 30, n° 9, 2000c, p. 1453-1464.
- Zaitsev V., Gusev V., Castagnede B., “Thermoelastic mechanism for logarithmic slow dynamics and memory in elastic wave interaction with individual cracks”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, n° 7, 2003.
- Zaitsev V., Nazarov V.E., Tournat V., Gusev V., Castagnède B., “Luxembourg-Gorky effect in a granular medium: probing perturbations of the material state via cross-modulation of elastic waves”, *Europhys. Lett.*, vol. 70, n° 5, 2005, p. 607-613.